ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ THƯ

VỀ ĐỊNH LÍ RITT ĐỐI VỚI KHÔNG ĐIỂM CỦA HÀM ĐA THỨC MŨ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ THƯ

VỀ ĐỊNH LÍ RITT ĐỐI VỚI KHÔNG ĐIỂM CỦA HÀM ĐA THỨC MŨ

Ngành: Toán giải tích

Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: PGS. TSKH Trần Văn Tấn

Thái Nguyên, năm 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đề tài luận văn "**Về định lý Ritt đối với không điểm của đa thức mũ**" không có sự sao chép của người khác. Khi viết luận văn tôi có tham khảo một số tài liệu, tất cả đều có nguồn gốc rõ ràng và được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TSKH Trần Văn Tấn. Tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Tác giả luận văn

Trần Thị Thư

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới PGS. TSKH Trần Văn Tấn. Thầy đã dành nhiều thời gian, công sức để hướng dẫn, trả lời những thắc mắc và giúp đỡ tôi hoàn thành bài luận văn này.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới bố, mẹ và các thành viên trong gia đình đã luôn động viên, ủng hộ tôi trong suốt thời gian qua.

Tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo trong trường Đại học Sư Phạm Thái Nguyên đã luôn nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu, đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi hoàn thành chương trình học và bảo vệ luận văn.

Bản thân tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu đã có nhiều cố gắng, tuy nhiên những thiếu sót chắc chắn khó tránh được. Tôi rất mong được thầy cô và các bạn đọc chỉ cho những thiếu sót đó.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Học viên

Trần Thị Thư

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Mục lục **iii**

LỜI MỞ ĐẦU **1**

Chương 1 ĐỊNH LÝ RITT CỔ ĐIỂN **2**

1.1 Định lý về thương hai đa thức mũ 3

1.2 Đa thức mũ với số mũ thực 7

Chương 2 MỘT DẠNG ĐỊNH LÝ RITT CHO ĐA THỨC NHIỀU BIẾN VỚI HỆ SỐ HÀM **11**

2.1 Giới thiệu kết quả chính 11

2.2 Một số ký hiệu và kết quả trong lý thuyết Nevanlinna 13

2.3 Một số kết quả trong lý thuyết Nevanlinna cho trường hợp mục tiêu di động 17

2.4 Bổ đề Borel và định lý Green với các mục tiêu di động 23

2.5 Chứng minh Định lý 2.2 và Hệ quả 2.1 26

Tài liệu tham khảo **37**

LỜI MỞ ĐẦU

Lí do chọn đề tài: Năm 1929, Ritt đạt được kết quả thú vị về các không điểm của hàm đa thức mũ: Cho $P(z)$ và $Q(z)$ là hai đa thức (khác không) với hệ số phức sao cho $\dfrac{P(e^z)}{Q(e^z)}$ là một hàm nguyên. Khi đó tồn tại đa thức $R(z)$ với hệ số phức sao cho $P(e^z) = Q(e^z)R(e^z)$. Định lí trên đã là nguồn cảm hứng cho nhiều nhà toán học sau này thiết lập các kết quả tương tự, với các cách tiếp cận khác nhau. Với mục đích tìm hiểu về chủ đề này, chúng tôi chọn đề tài "Về định lí Ritt đối với không điểm của hàm đa thức mũ".

Mục đích nghiên cứu: Tìm hiểu và trình bày lại một cách chi tiết, hệ thống kết quả cổ điển về các không điểm của hàm đa thức mũ đạt được bởi Ritt [2] năm 1929 và một mở rộng đạt được gần đây theo một cách tiếp cận khác bởi Ji Guo [1].

Đối tượng nghiên cứu: Hàm phân hình trên mặt phẳng phức.

Phương pháp nghiên cứu: Các phương pháp truyền thống của Giải tích phức, Ứng dụng của Lí thuyết Nevanlinna đối với ánh xạ chỉnh hình.

Chương 1

ĐỊNH LÝ RITT CỔ ĐIỂN

Cho một hàm đa thức mũ

$$a_0e^{\alpha_0 z} + ... + a_m e^{\alpha_m z} \tag{1.1}$$

với các hệ số hằng $a_0, ..., a_m$ và các $\alpha_0, ..., \alpha_m$ đôi một phân biệt. Sự phân bố các không điểm của các hàm như vậy, và các hàm tổng quát hơn với các hệ số là các đa thức biến z đã được nghiên cứu bởi Tamarkin, Pólya và Schwenglert. Trong chương này chúng tôi trình bày lại hai kết quả sau của Ritt [3].

- Nếu mỗi không điểm của một đa thức mũ cũng là không điểm của một đa thức mũ thứ hai, thì thương của chúng là một đa thức mũ.

- Xét hàm

$$1 + a_1e^{\alpha_1 z} + ... + a_m e^{\alpha_m z},$$

với các số thực $\alpha_1, ..., \alpha_m$ thỏa mãn $0 < \alpha_1 < ... < \alpha_m$. Với một dải nằm ngang bất kỳ trong mặt phẳng phức, ta tính tổng của các phần thực của các không điểm của đa thức mũ trong dải, với phần ảo bị chặn. Kết quả này có thể coi là tương ứng với định lý nói rằng tích của các không điểm của $1 + a_1e^{\alpha_1 z} + ... + a_m e^{\alpha_m z}$ là $(-1)^m/a_m$.

1.1 Định lý về thương hai đa thức mũ

Định lý 1.1. *Cho*

$$A(z) = a_0 e^{\alpha_0 z} + ... + a_m e^{\alpha_m z}, \qquad B(z) = b_0 e^{\beta_0 z} + ... + b_n e^{\beta_n z} \tag{1.2}$$

Giả sử rằng $B(z) \not\equiv 0$, *và* $\dfrac{A(z)}{B(z)}$ *là một hàm nguyên. Khi đó, tồn tại một hàm*

$$C(z) = c_0 e^{\gamma_0 z} + ... + c_m e^{\gamma_p z}$$

sao cho $A(z) = B(z)C(z)$.

Trước hết ta mô tả vắn tắt lại một kết quả của Tamarkin, Pólya và Schwenglert. Biểu diễn các α_i trong mặt phẳng phức, và gọi $\mathfrak{A}$ là đa giác lồi nhỏ nhất chứa chúng. Nó giúp chúng ta thu được tính duy nhất trong phân tích ở Bổ đề 1.1.

Giả sử các cạnh của $\mathfrak{A}$ được xác định bởi

$$\sigma_1, ..., \sigma_l.$$

Xét $d_i, (i = 1, ..., l)$ là tia đối xứng qua trục thực với một tia vuông góc với σ_i ra phía ngoài $\mathfrak{A}$. Các tác giả trên đã chứng minh rằng tồn tại l nửa dải song song có hướng d_i $(i = 1, ..., l)$ mà chúng chứa tất cả các không điểm của A. Nếu s_i là độ dài của σ_i, số các không điểm có mô-đun nhỏ hơn r và nằm trong nửa dải song song với d_i là tương đương với $rs_i/(2\pi)$ (khi r tiến ra ∞).

Bây giờ ta xét đa giác lồi $\mathfrak{B}$ tương ứng với $B(z)$. Vì mỗi không điểm của B cũng là một không điểm của A nên rõ ràng, từ công thức tiệm cận cho số không điểm trong một nửa dải, mỗi cạnh τ của $\mathfrak{B}$ song song với một cạnh nào đó của $\mathfrak{A}$ và độ dài cạnh của $\mathfrak{B}$ không bé hơn độ dài cạnh tương ứng

của $\mathfrak{A}$, và hai hướng vuông góc với hai cạnh nói trên ra phía ngoài đa giác tương ứng là trùng nhau.

Giả sử rằng $\alpha_0, ..., \alpha_m$ trong (1.1) được sắp xếp để phần thực tăng dần, trong trường hợp phần thực bằng nhau thì ta xét tiếp tới sự tăng dần của phần ảo. Khi các $\alpha_0, ..., \alpha_m$ là các số thực không âm và $a_m \neq 0$, chúng ta sẽ gọi α_m là bậc của hàm (1.1).

Bổ đề 1.1. *Giả sử $A(z)$, và $B(z) \not\equiv 0$ là hai đa thức mũ với các số mũ thực không âm. Khi đó, ta có thể biểu diễn*

$$A = QB + R, \tag{1.3}$$

ở đó Q và R là hai đa thức mũ với các số mũ thực không âm, và R hoặc đồng nhất 0 hoặc là một đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của B.

Chứng minh. Nếu trong (1.2) ta có $\alpha_m < \beta_n$, thì ta có ngay (1.3) với $Q = 0, R = A$. Do đó, bây giờ ta xét trường hợp $\alpha_m \geq \beta_n$.

Gọi $\alpha_m, ..., \alpha_{m-i}$ là tập tất cả các số α_i không bé hơn β_n. Xét đa thức mũ

$$C = A - \frac{(a_m e^{\alpha_m z} + ... + a_{m-i} e^{\alpha_{m-i} z})}{b_n e^{\beta_n} z} B, \tag{1.4}$$

ở đó, các số mũ đều không âm.

Nếu B chỉ gồm một hạng tử. Khi đó C hoặc bằng 0, hoặc có bậc nhỏ hơn B, và ta có biểu diễn $A = QB + R$ với $R = C$ và Q là phân thức trong vế phải của (1.4), tức là:

$$Q = \frac{(a_m e^{\alpha_m z} + ... + a_{m-i} e^{\alpha_{m-i} z})}{b_n e^{\beta_n} z}.$$

Bây giờ, giả sử B có ít nhất hai hạng tử. Nếu C khác 0, khi đó, bậc của C nhỏ hơn β_n hoặc bằng $\alpha_m - (\beta_n - \beta_{n-1})$. Nếu C bằng 0, hoặc có bậc nhỏ hơn β_n, từ (1.4) ta đạt được ngay biểu diễn $A = QB + R$. Với trường hợp

còn lại, ta nhân chéo và chuyển vế trong biểu thức (1.4) và nhận được (1.3). Tiếp tục quá trình trên, do $\beta_n - \beta_{n-1}$ là một đại lượng cố định, sau hữu hạn bước ta sẽ nhận được (1.3). $\square$

Từ công thức xấp xỉ số không điểm trên mỗi nửa dải song song (ứng với cạnh của đa giác bao tuyến tính của tập các số mũ), ta có biểu diễn trong (1.3) là duy nhất.

Chứng minh Định lý 1.1. Giả sử rằng $A \not\equiv 0$. Nhóm các số hạng của A có các số mũ có phần thực giống nhau, ta viết

$$A = P_1 e^{u_1 z} + ... + P_j e^{u_j z}, \tag{1.5}$$

ở đó $u_1, ..., u_j$ là các số thực, tăng dần theo các chỉ số và $P_1, ..., P_j$ có dạng

$$g_1 e^{v_1 iz} + ... + g_p e^{v_p iz}, \tag{1.6}$$

với các số thực $v_1, ..., v_j$ tăng dần theo các chỉ số. Vì không làm thay đổi các không điểm của A và không ảnh hưởng đến tính chia hết mà ta đang nghiên cứu, sau khi nhân A với một hàm mũ, ta giả sử là u_1 và số v nhỏ nhất trong P_j đều bằng 0. Tương tự, giả sử

$$B = Q_1 e^{w_1 z} + ... + Q_h e^{w_h z}, \tag{1.7}$$

với các điều kiện tương tự như đối với A. Đại lượng u_j là hiệu giữa hoành độ của điểm ngoài cùng bên phải và điểm ngoài cùng bên trái của $\mathfrak{A}$. Vì mỗi cạnh của $\mathfrak{B}$ tương ứng với một cạnh của $\mathfrak{A}$ ít nhất về chiều dài và có cùng hướng nên rõ ràng $u_j \geq w_h$.

Nếu B chỉ có một hạng tử, ta có ngay kết quả định lí. Bây giờ ta giả sử B chứa ít nhất hai hạng tử, tức là, trong (1.7), ta có $h \geq 2, Q_1, Q_h \not\equiv 0$. Đặt $u_j, ..., u_{j-r}$, trong đó mỗi u đều vượt quá $u_j - (w_h - w_{h-1})$. Ta sẽ chứng minh rằng thương của $P_j, ..., P_{j-r}$ với Q_h là đa thức mũ có dạng (1.6).